1B-06

n vs. the Rest 型 2 値判別器を用いた ECOC の構成法とその性質

平澤茂一 † 雲居玄道 ‡ 八木秀樹 § 小林学 †

† 早稲田大学 ‡ 長岡技術科学大学 § 電気通信大学

1 はじめに

n vs. the Rest ($n \geq 1$) の 2 値判別器を複数個（N 個, $N \geq 3$）組み合わせることで多値（M 値, $M \geq 3$）分類を実現する ECOC（Error-Correcting Output Codes）構成法 [1] を考える．M 個のカテゴリを n 対他（$M-n$）に分類する 2 値判別器は最も簡単な分類器である．ECOC 法は多値分類問題に誤り訂正符号の考え方を適用し，幅広い知識を活用して解決する一方法を与えている．本稿では，n vs. the Rest の 2 値判別器を用いた ECOC の構成法を符号語表で表現し，得られた符号語の集合を nvR 符号と呼ぶことにする [2]．符号語の生成方法から，nvR 符号は非線形（Nonlirear）等距離符号（Equidistant codes）であり，$n = M/2$ の場合を除き，重み一定符号（Constant-weight codes）になっている．さらに，nvR 符号を連接して Exhaustive 符号が得られるなど，興味ある性質を明らかにする．また，nvR 符号の持つ符号パラメータを求めその適用範囲を明らかにし，比較的符号長 N の小さな Simplex 符号，修正 Reed Muller 符号，Hadamard 行列から得られる符号 [3] などと比較する．

2 符号語表

2.1 符号語表の構成と性質

ECOC 構成法は M 行 N 列の符号語を列挙した符号語表（Codeword Table）$W = [w_{ij}]$ により性質・性能が決まる．ここで，$w_{ij} \in \{0, 1\}$ の 2 元符号を仮定する．W の第 i 行を $\boldsymbol{c}_i = (w_{i1}, w_{i2}, \ldots, w_{iN})$，第 j 列を $\boldsymbol{d}_j = (w_{1j}, w_{2j}, \ldots, w_{Mj})^\top$ で表す．前者は第 i の符号語ベクトル，後者は第 j の判別器ベクトルである．ここで，$\top$ は転置を表す．いま，任意の長さ L の 2 元ベクトル $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_L)$ の要素 $u_l = 1$ ならば $u_l^{\mathsf{C}} = 0$, $u_l = 0$ なら $u_l^{\mathsf{C}} = 1$ ($l = 1, 2, \ldots, L$) とする長さ L の 2 元ベクトル $\boldsymbol{u}^{\mathsf{C}} = (u_1^{\mathsf{C}}, u_2^{\mathsf{C}}, \ldots, u_L^{\mathsf{C}})$ を $\boldsymbol{u}$ の補元（Complement）と呼ぶことにする．

明らかに有効な行列 W は，次の列ベクトルを含まない **（列操作）**．

① 同一の列ベクトル，② 全 0 および全 1 列ベクトル，③ もし $\boldsymbol{d}_j$ を含めば，$\boldsymbol{d}_{j'} = \boldsymbol{d}_j^{\mathsf{C}}$ となる列ベクトル [*1]

2.2 Exhaustive 符号 [1]

長さ M の全ての 2^M 個の列ベクトルからなる行列を考える．ここから，列操作を行って得られる $M \times N$ ($N = 2^{M-1} - 1$) の符号語表は $(2^{M-1} - 1, \log_2 M, 2^{M-2})$ Exhaustive 符号を与える．ここで, 符号長 N, 情報記号数 K, 最小距離 D の符号を (N, K, D) 符号と表す．

[例 1] $M = 5$ のとき，$N = 15$，$D = 8$ の Exhaustive 符号の符号語表 $W_{\mathrm{exh}}^{(5)}$ を式 (1) に示す．

$$W_{\mathrm{exh}}^{(5)} = \begin{bmatrix} 0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0 \\ 0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,1,1,1,1 \\ 0,0,0,1,1,1,1,0,0,0,0,1,1,1,1 \\ 0,1,1,0,0,1,1,0,0,1,1,0,0,1,1 \\ 1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

3 nvR 符号の性能

3.1 nvR 符号の符号語表の構成法

符号語数（カテゴリ数）M, 符号長 N の nvR 符号の符号語表 $W_n^{(M)}$ は (a) $n = 1$, (b) $2 \leq n \leq M, n \neq M/2$, (c) $n = M/2$ の場合に分け，次式で与えられる．ここで，長さ ℓ の全 1 のベクトルを 1^ℓ，長さ ℓ の全ゼロのベクトルを 0^ℓ，$k \times k$ の単位行列を I_k で示す．

いま，$n = 1$ に対して $\tilde{W}_1^{(M)} = I_M$，$2 \leq n < M$ に対して

$$\tilde{W}_n^{(M)} = \begin{bmatrix} 1^{N_1} & 0^{N_2} \\ \tilde{W}_{n-1}^{(M-1)} & \tilde{W}_n^{(M-1)} \end{bmatrix}, \tag{2}$$

$n = M$ に対して $\tilde{W}_n^{(M)} = [1^M]^\top$ を定義する．ここで，$N_1 = \binom{M-1}{n-1}, N_2 = \binom{M-1}{n}$ である．カテゴリ数 $M \geq 3$ に対し行列 $\tilde{W}_n^{(m)}$ ($m = M-1, M$) を用いて，nvR 符号の符号語表を以下のように構成する．

(a) $n = 1$ のとき, $W_1^{(M)} = \tilde{W}_1^{(M)}$ とおく．

(b) $2 \leq n < M/2$ のとき

$$W_n^{(M)} = \tilde{W}_n^{(M)}. \tag{3}$$

(c) $n = M/2$ のとき

$$W_n^{(M)} = \begin{bmatrix} 1^{N_1} \\ \tilde{W}_{n-1}^{(M-1)} \end{bmatrix} \tag{4}$$

とおく．式 (4) は Half vs. the Rest 符号 [4] の構成を表す．この場合，式 (2) における左前半の小行列と右後半の小行列の列は互いに 2 つの補元の組み合わせで構成されるため，2.1 で述べた列操作により左前半のみを残す．

[例 2] nvR 符号の例を示す．$M = 5$ のとき，$W_1^{(5)}$, $W_2^{(5)}$ は以下の通りである．

$$W_1^{(5)} = \begin{bmatrix} 1,0,0,0,0 \\ 0,1,0,0,0 \\ 0,1,0,0,0 \\ 0,0,1,0,0 \\ 0,0,0,0,1 \end{bmatrix}, \quad W_2^{(5)} = \begin{bmatrix} 1,1,1,1,0,0,0,0,0,0 \\ 1,0,0,0,1,1,1,0,0,0 \\ 0,1,0,0,1,0,0,1,1,0 \\ 0,0,1,0,0,1,0,1,0,1 \\ 0,0,0,1,0,0,1,0,1,1 \end{bmatrix}.$$

3.2 nvR 符号の符号パラメータ

3.1 で示した符号語表の構成法より，容易に次の定理が得られる．

Construction Methods and their Properties of ECOC using n vs. the Rest Type Binary Classifier
Shigeichi Hirasawa†, Gendo Kumoi‡, Hideki Yagi§, Manabu Kobayashi†
†Waseda University
‡Nagaoka University of Technology
§The University of Electro-Communications

[*1] 2 値判別器 $\boldsymbol{d}_j$ と $\boldsymbol{d}_j^{\mathsf{C}}$ は，同一の分類境界を持つ．

[定理 1] (n**vR 符号の符号パラメータ)**
$M \geq 3, 1 \leq n \leq M/2$ を与えたとき，符号語表 $W_n^{(M)}$ による nvR 符号の符号パラメータは次式で与えられる．

$$\text{符号長 } N = \begin{cases} \binom{M}{n}, & n \neq M/2; \\ \binom{M}{n}/2, & n = M/2, \end{cases} \tag{5}$$

$$\text{情報記号数 } K = \log_2 M, \tag{6}$$

$$\text{最小距離 } D = \begin{cases} 2\binom{M-2}{n-1}, & n \neq M/2; \\ \binom{M-2}{n-1}, & n = M/2. \end{cases} \tag{7}$$

また符号語表の構成方法から，次の結果が得られる．

[系 1] nvR 符号を連接して得られる符号は Exhaustive 符号である．すなわち，M が与えられたときの Exhaustive 符号の符号語表 $W_{\text{exh}}^{(M)} = [W_1^{(M)}, W_2^{(M)}, \cdots, W_{\lfloor M/2 \rfloor}^{(M)}]$ で与えられる．

[例 3] 例 2 に記した nvR 符号の符号語表を連接して $(15, \log_2 5, 8)$ Exhaustive 符号の符号語表 $W_{\text{exh}}^{(5)} = [W_1^{(5)}, W_2^{(5)}]$ が得られる．

[系 2] nvR 符号は非線形符号 (Non-linear codes) である．

[系 3] nvR 符号は等距離符号 (Equidistant codes) である．また，そのハミング距離は最小距離 D に等しい．

[系 4] nvR 符号は $n = M/2$ (M が偶数の場合) を除き，重み一定符号 (Constant-weight codes) である．このとき，一定重みは $\binom{M-2}{n-2} + \binom{M-2}{n-1}$ である．M が偶数の場合は全 1 の符号語を持ち，重み一定符号とはならない．

4　nvR 符号の性能の比較

(1) nvR 符号を誤り訂正符号の一つとみなし，Simplex 符号，Hadamard 行列から得られる符号などの結果と共に，符号長に対する最小距離 D/N と符号化比率 r の関係を図 1 に示す．ここで，$r = (\log_2 M)/N$ である．図 1 では，点○が上ほど訂正能力が大きく，右ほど効率が良い．

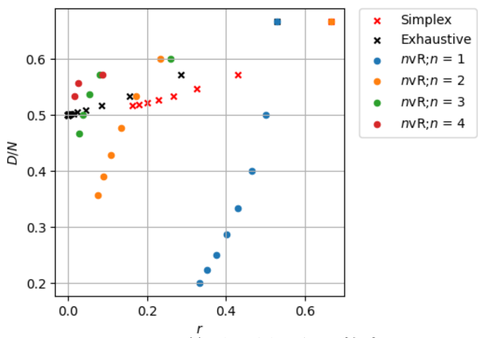

図 1　nvR 符号の誤り訂正能力

(2) 図 2 に Half vs. the Rest 符号，Simplex 符号，Exhaustive 符号について，図 1 の $D/N = 0.5$〜0.7 の部分を拡大したものを示す．

5　考察

5.1　nvR 符号の訂正能力と適用範囲

(1) 図 1・図 2 より，nvR 符号は与えられた n に対し訂正能力 D/N が $n = \lfloor M/2 \rfloor$ の近辺，すなわち Half vs. the Rest 符号で最大値を取ることが分かる．r は小となるが，nvR 符号の適用領域はこの辺にある．

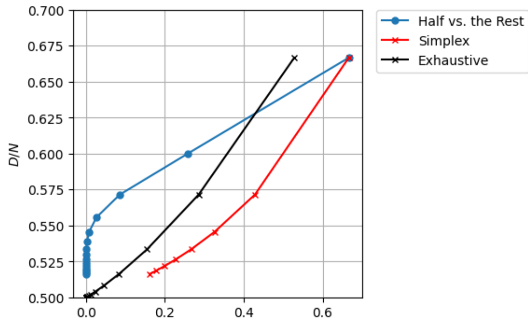

図 2　nvR 符号の誤り訂正能力（$r = 0.5$〜0.7）

(2) 漸近的な符号の訂正能力は，通常次式の漸近的距離比 $\delta(r)$ で論じることが多い．Exhaustive 符号のそれは

$$\delta_{\text{exh}}(r) = \lim_{N \to \infty} D/N = 1/2 \tag{8}$$

となり，$r > 0$ で $1/2 + 0$ となる数少ない符号であり興味深い．

5.2　等距離性

符号語表の等距離性は，しばしば最適性を論じるときに注目される．Bayes 最適性 [5] や，理論的解析でその重要性 [2] が指摘されている．

6　むすび

今回は nvR 符号について，誤り訂正符号と見たときの性質を議論した．ECOC の実験的検討は今後の課題である．訂正能力 D/N の大 (小) と分類誤り確率（カテゴリ復号誤り確率）の小 (大) の評価は学習データ・テストデータの与え方や ECOC の復号法に依存し，必ずしも同じではない．人工データ，ベンチマークデータなどで検証する必要がある．

謝辞

本研究の一部は，JSPS 科研費 20K04462, 23K04293, 24K20833 の助成による．

参考文献

[1] T. G. Dietterich, and G. Bakiri, “Solving multiclass learning problems via error-correcting output codes,” *Journal of artificial intelligence research*, vol. 2, pp. 263–286, 1994.

[2] G. Kumoi, H. Yagi, M. Kobayashi, M. Goto, and S. Hirasawa, “Performance evaluation of error-correcting output coding based on noisy and noiseless binary classifiers,” *International Journal of Neural Systems*, vol. 33, no. 02, p. 2350004, 2023.

[3] 平澤茂一，雲居玄道，八木秀樹，小林学，後藤正幸，稲積宏誠，“構成的符号化を用いた ECOC の一構成法 (続)”，第 84 回全国大会講演論文集, vol. 2022, no. 1, pp. 161–162, 2022.

[4] H.-Y. Lin, S. M. Moser, and P.-N. Chen, “Weak flip codes and their optimality on the binary erasure channel,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 64, no. 7, pp. 5191–5218, 2018.

[5] G. James, and T. Hastie, “The error coding method and picts,” *Journal of Computational and Graphical Statistics*, vol. 7, no. 3, pp. 377–387, 1998.