情報処理学会第87回全国大会
2025年3月13-15日，立命館大学，茨木・大阪
ハイブリッド開催

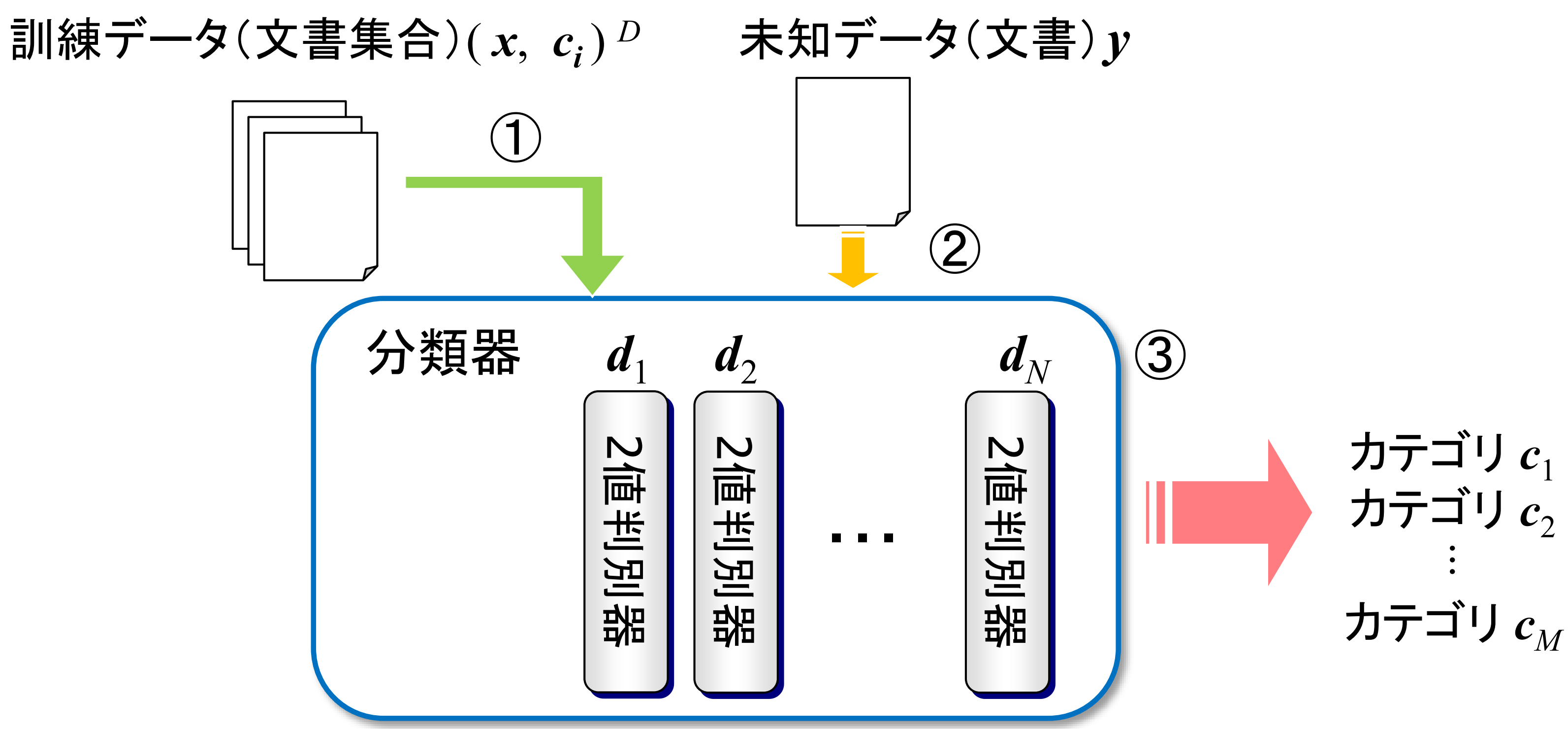
n vs. the Rest 型2値判別器を用いたECOCの構成法とその性質

早稲田大学 平澤 茂一
長岡科学技術大学 雲居 玄道
電気通信大学 八木 秀樹
早稲田大学 小林 学

はじめに

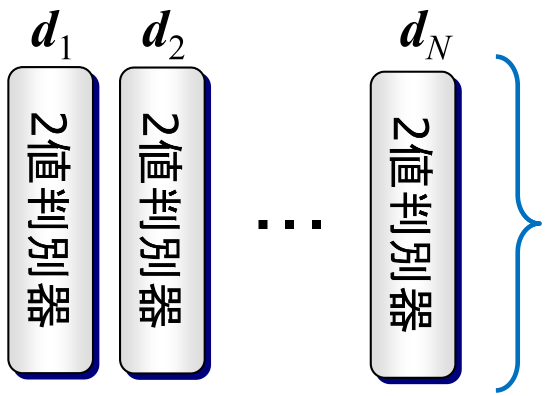
多値分類問題（M : カテゴリ数）

- 直接的な構成: 決定木、ランダムフォレスト、など
- 2値判別器の組合せ: Error−Correcting Output Codes (ECOC)



ECOCの符号語表

分類器



2値判別器 d_i：

M 個のカテゴリを2クラスに分けて
もっともらしいクラスを判別する

2値判別器において，各カテゴリがどちらのクラス (0または1) として扱われるかを表現する行列を符号語表と呼ぶ.

$$W = [w_{ij}] \in \{0, 1\}^{M \times N}$$

W の例

$M = 4$

	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7
c_1	0	0	0	0	0	0	0
c_2	0	0	0	1	1	1	1
c_3	0	1	1	0	0	1	1
c_4	1	0	1	0	1	0	1

クラス0：カテゴリ c_1 , c_4
クラス1：カテゴリ c_2 , c_3
の2値判別器

研究目的

- 行ベクトル(符号語)間のハミング距離が大きいと，分類性能が向上することが経験的に知られている.
- n vs. the Rest (nvR) 符号と Exhaustive符号は(ある仮定のもとで)分類誤り率を最小にする最適な符号である[2] .
- しかし，nvR 符号の距離構造について詳細な解析はされていない.

研究の目的と発表内容

- nvR 符号の構造を詳細に解析する.
- 特に，再帰的な構成を示し，距離構造を明らかにする.
- nvR 符号と Exhaustive 符号等の誤り訂正能力を比較する.

[2] G. Kumoi, et al.“Performance evaluation of error-correcting output coding based on noisy and noiseless binary classifiers,” *Int. J. Neural Syst.*, vol. 33, no. 2, 2023.

符号語表

符号語表 $W = [w_{ij}] \in \{0,1\}^{M \times N}$

- 第 i 行 $\boldsymbol{c}_i = (w_{i1}, w_{i2}, \ldots, w_{iN})$ （i 番目のカテゴリ）
- 第 j 列 $\boldsymbol{d}_j = (w_{1j}, w_{2j}, \ldots, w_{Mj})^{\mathrm{T}}$ （j 番目の2値判別器）

列ベクトル $\boldsymbol{d}$ に対し，$\overline{\boldsymbol{d}} = \boldsymbol{d} \oplus \boldsymbol{1}$ を $\boldsymbol{d}$ の補元と呼ぶ．

符号語表において，$\boldsymbol{d}$ と補元 $\overline{\boldsymbol{d}}$ は同じ 2 値判別器を表す．

	$\boldsymbol{d}_1$	$\boldsymbol{d}_2$	$\boldsymbol{d}_3$	$\boldsymbol{d}_4$	$\boldsymbol{d}_5$	$\boldsymbol{d}_6$	$\boldsymbol{d}_7$
$\boldsymbol{c}_1$	0	0	0	0	0	0	1
$\boldsymbol{c}_2$	0	0	0	1	1	1	0
$\boldsymbol{c}_3$	0	1	1	0	0	1	0
$\boldsymbol{c}_4$	1	0	1	0	1	0	1

同じ2値判別器を表すため，冗長な表現

Exhaustive 符号 (全ての2値判別器の組合せ)

長さM の非零の列ベクトル $\boldsymbol{d}_j$ $(j = 1, 2, \cdots, 2^M - 1)$ を生成し，意味のない列を取り除く

① 全1の列ベクトル　② 補元の列

31

$M = 5$

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

$N = 2^{M-1} - 1$　②　①

得られる符号語表

$$W = \begin{bmatrix} 0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0 \\ 0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,1,1,1,1 \\ 0,0,0,1,1,1,1,0,0,0,0,1,1,1,1 \\ 0,1,1,0,0,1,1,0,0,1,1,0,0,1,1 \\ 1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1 \end{bmatrix}$$

nvR 符号

M 個のカテゴリを n 対 $(M-n)$ にクラス分けする 2 値判別器を全て並べた符号語表 $W_n^{(M)}$ を，nvR符号 と呼ぶ．

[例]　$M=5,\ n=1$ のとき，1vR 符号の符号語表

$$W_1^{(5)} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} = I_5 \qquad (I_M\text{：単位行列}).$$

Neural Network の最終層に相当する．

$n \geq 2$ のときは深層学習の拡張につながる [2]．

$n \geq 2$ の場合

$W_n^{(M)}$: M 個のカテゴリを n 対 $(M-n)$ に分類する 2 値判別器の組合せ．一般に $n \leq M/2$ を仮定する．

[例2]　$M=5,\ n=2$ のとき，2vR 符号の符号語表

$$
W_2^{(5)} = \begin{array}{c}
\begin{array}{cc} \quad 1^4 \quad\quad\quad & \quad\quad\quad\quad 0^6 \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccc|cccccc}
1, & 1, & 1, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\
1, & 0, & 0, & 0, & 1, & 1, & 1, & 0, & 0, & 0 \\
0, & 1, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & 1, & 1, & 0 \\
0, & 0, & 1, & 0, & 0, & 1, & 0, & 1, & 0, & 1 \\
0, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & 1, & 0, & 1, & 1
\end{array}\right]
\end{array}.
$$

$W_1^{(4)}$　　　　$W_2^{(4)}$

各列のハミング重みが $n=2$ になる．

nvR 符号の再帰的な構成法

(1) 構成要素の準備

(a) $n = 1$ に対して $\tilde{W}_1^{(M)} := I_M$ (単位行列),

(b) $2 \le n < M$ に対して

$$\tilde{W}_n^{(M)} := \begin{bmatrix} 1^{N_1} & 0^{N_2} \\ \tilde{W}_{n-1}^{(M-1)} & \tilde{W}_n^{(M-1)} \end{bmatrix},$$

(c) $n = M$ に対して $\tilde{W}_n^{(M)} := 1^M$ (全 1 列ベクトル)

を定義する．

ただし，$N_1 = \binom{M-1}{n-1}, N_2 = \binom{M-1}{n}$.

(2) nvR 符号の構成

nvR 符号の符号語表 $W_n^{(M)}$ を以下のように構成する．

(a) $1 \leq n < M/2$ のとき　(通常)

$$W_n^{(M)} := \tilde{W}_n^{(M)}.$$

(b) $n = M/2$ のとき　(特別)

$$W_n^{(M)} := \begin{bmatrix} 1^{N_1} \\ \tilde{W}_{n-1}^{(M-1)} \end{bmatrix}.$$

[例3] $M = 6,\ n = 2$ (通常) のとき，2vR 符号の符号語表

$$W_2^{(6)} = \tilde{W}_2^{(6)} = \begin{bmatrix} 1^{N_1} & 0^{N_2} \\ \tilde{W}_1^{(5)} & \tilde{W}_2^{(5)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1,1,1,1,1, & 0,0,0,0,0,0,0,0,0,0 \\ 1,0,0,0,0, & 1,1,1,1,0,0,0,0,0,0 \\ 0,1,0,0,0, & 1,0,0,0,1,1,1,0,0,0 \\ 0,0,1,0,0, & 0,1,0,0,1,0,0,1,1,0 \\ 0,0,0,1,0, & 0,0,1,0,0,1,0,1,0,1 \\ 0,0,0,0,1, & 0,0,0,1,0,0,1,0,1,1 \end{bmatrix}.$$

2 項係数のよく知られた漸化式 $\binom{m}{k} = \binom{m-1}{k-1} + \binom{m-1}{k}$ を構成に利用している．

再帰的な構成が符号語間の距離の解析につながる．

[例4] $M=6,\ n=M/2=3$ (特別)，3vR 符号の符号語表

$$\tilde{W}_3^{(6)} = \begin{bmatrix} 1^{N_1} & 0^{N_2} \\ \tilde{W}_2^{(5)} & \tilde{W}_3^{(5)} \end{bmatrix}$$

補元の関係！
各2値判別器が2回使用される冗長な表現

$$= \left[\begin{array}{c} 1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0 \\ 1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,1,1,0,0,0,0 \\ 1,0,0,0,1,1,1,0,0,0,1,1,1,0,0,0,1,1,1,0 \\ 0,1,0,0,1,0,0,1,1,0,1,0,0,1,1,0,1,1,0,1 \\ 0,0,1,0,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,1,0,1,1 \\ 0,0,0,1,0,0,1,0,1,1,0,0,1,0,1,1,0,1,1,1 \end{array}\right].$$

$n=M/2$ のときは，左半分を $W_n^{(M)}$ とおく構成にする

$\Rightarrow$ 符号語間の距離関係も例外的になる

nvR 符号の符号パラメータの解析

[定理 1] (nvR 符号の符号パラメータ)

nvR 符号の符号パラメータは次式で与えられる．

符号長
$$N = \begin{cases} \binom{M}{n}, & n \neq M/2; \\ \binom{M}{n}/2, & n = M/2, \end{cases} \tag{5}$$

情報記号数
$$K = \log_2 M, \tag{6}$$

最小距離
$$D = \begin{cases} 2\binom{M-2}{n-1}, & n \neq M/2; \\ \binom{M-2}{n-1}, & n = M/2. \end{cases} \tag{7}$$

[系 3] nvR 符号は**等距離符号** (Equidistant codes) である．
また，そのハミング距離は最小距離 D に等しい．

(証明) 2 つの系列 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の**ハミング距離**を $d_H(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ で示す．
以降では，**帰納法**により題意を示す．

$M=3,\ n=2$ のとき，式 (4) の $W_2^{(3)}$ から 3 つの符号語は等距離で最小距離 2 に等しい．すなわち $\boldsymbol{c}_i, \boldsymbol{c}_{i'} \in W_2^{(3)}$ $(i \neq i')$ について次式が成り立つ．

$$d_H(\boldsymbol{c}_i, \boldsymbol{c}_{i'}) = 2\binom{M-2}{n-1} = 2\binom{1}{1} = 2.$$

次に，式 (2) で $W_{n-1}^{(M-1)}$， $W_n^{(M-1)}$ が共に等距離符号であるとし，$W_n^{(M)}$ が等距離符号であることを導く．

系3の証明（つづき）

1^{N_1} と $W_{n-1}^{(M-1)}$ の任意の符号語との最小距離は $\binom{M-2}{n-1}$ である．同様にして，0^{N-N_1} と $W_{n}^{(M-1)}$ の任意の符号語との最小距離も $\binom{M-2}{n-1}$ である．合わせて $\binom{M-2}{n-1}+\binom{M-2}{n-1}=2\binom{M-2}{n-1}$ となる．

一方，$W_{n-1}^{(M-1)}$ と $W_{n}^{(M-1)}$ の連接による符号の最小距離は両者の最小距離の和であるから $2\binom{M-3}{n-2}+2\binom{M-3}{n-1}=2\binom{M-2}{n-1}$ となり $W_{n}^{(M)}$ は最小距離 $D=2\binom{M-2}{n-1}$ に等しい等距離符号を与える．

$n = M/2$ の場合は，$\mathrm{W}_{n}^{(M)}$ の左前半部が残り，最小距離 $D=\binom{M-2}{n-1}$ となるが，やはり等距離符号を与える．

[系 4] nvR 符号は $n \neq M/2$ のとき，**重み一定符号**であり，その重みは $\binom{M-2}{n-2} + \binom{M-2}{n-1}$ で与えられる．

(証明) 長さ n の符号語 $\boldsymbol{a}$ の重みを $w(\boldsymbol{a})$ で表す．
$W_2^{(3)}$ に対し，各 $i = 1, 2, \ldots, M$ について次式が成り立つ．

$$w(\boldsymbol{c}_i) = \binom{M-2}{n-2} + \binom{M-2}{n-1} = \binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 1 + 1 = 2.$$

次に，式 (2),(3) で $W_{n-1}^{(M-1)}$， $W_n^{(M-1)}$ が共に重み一定符号であるとし，M が偶数の場合 $W_n^{(M)}$ が重み一定符号となることを導く．

系4の証明（つづき）

ここで，$w(1^{N_1}) = N_1 = \binom{M-1}{n-1}$，

一方，符号語表 $W_{n-1}^{(M-1)}, W_{n-1}^{(M)}$ のそれぞれの符号重みは $\binom{M-2}{n-2}, \binom{M-2}{n-1}$ で与えられ，両者の連接による重みはその和で与えられるから，各 $i = 1, 2, \cdots, M$ について

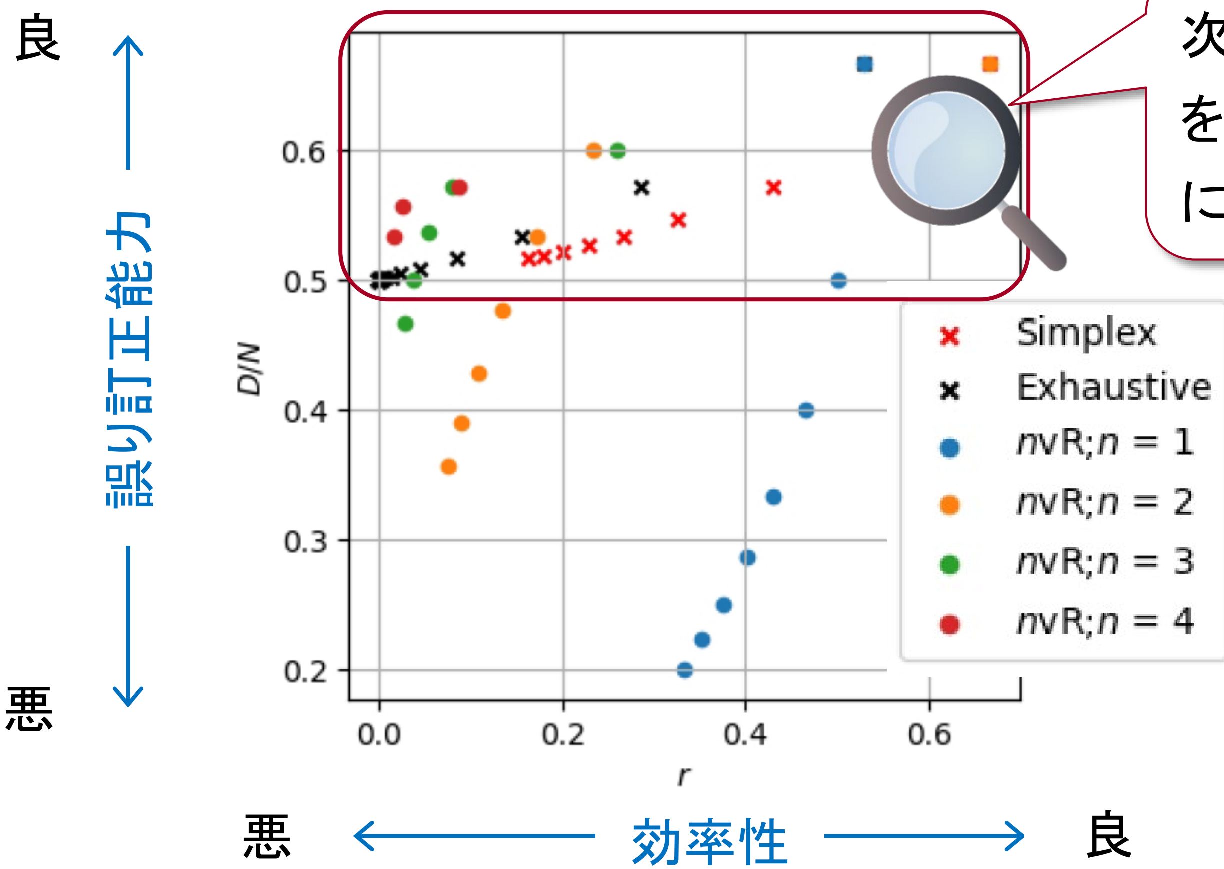
$$
\begin{aligned}
w(\boldsymbol{c}_i) &= \min\left[\binom{M-1}{n-1}, \binom{M-2}{n-2} + \binom{M-2}{n-1}\right] \\
&= \binom{M-2}{n-2} + \binom{M-2}{n-1}.
\end{aligned}
$$

となり，重み一定符号を与える．

nvR符号の性能の比較

$$\left(r := \frac{\log_2 M}{N}\right)$$

(1) nvR符号，Simplex符号，Hadamard符号，Exhaustive符号の符号化率 r に対する最小距離と符号長の比 D/N を比較



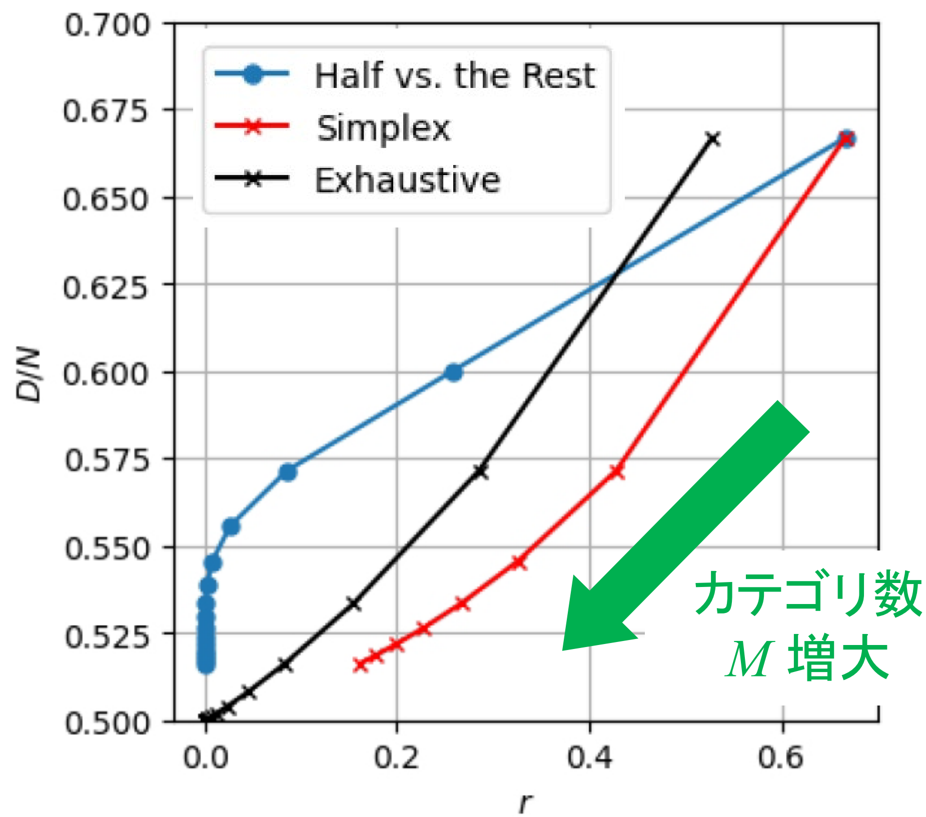
次ページでこの辺をいくつかの符号に限定して掲載

(2) Half vs. the Rest符号（$n = M/2$ の nvR符号），Simplex符号，Exhaustive符号について，図1の D/N = 0.5～0.7 を拡大した図

誤り訂正能力が高い符号

- M が小さいとき：Exhaustive符号
- M が大きいとき：nvR符号（$n = M/2$）

ただし，M の増大とともに符号化率（効率性）が下がる



考察

(1) 図 1・図 2 より，nvR 符号は与えられた n に対し訂正能力 D/N が $n = \lfloor M/2 \rfloor$ の近辺，すなわち Half vs. the Rest 符号で最大値を取ることが分かる．
r は小となるが，nvR 符号の適用領域はこの辺にある．

(2) 漸近的な符号の訂正能力は，次式で与える漸近的距離比 $\delta(r)$ で論じることが多い．Exhaustive 符号のそれは

$$\delta(r) \equiv \lim_{N \to \infty} D/N = 1/2$$

となり，$r > 0$ で $1/2 + 0$ となる数少ない符号である．

多値分類問題への適用: 人工データによる結果

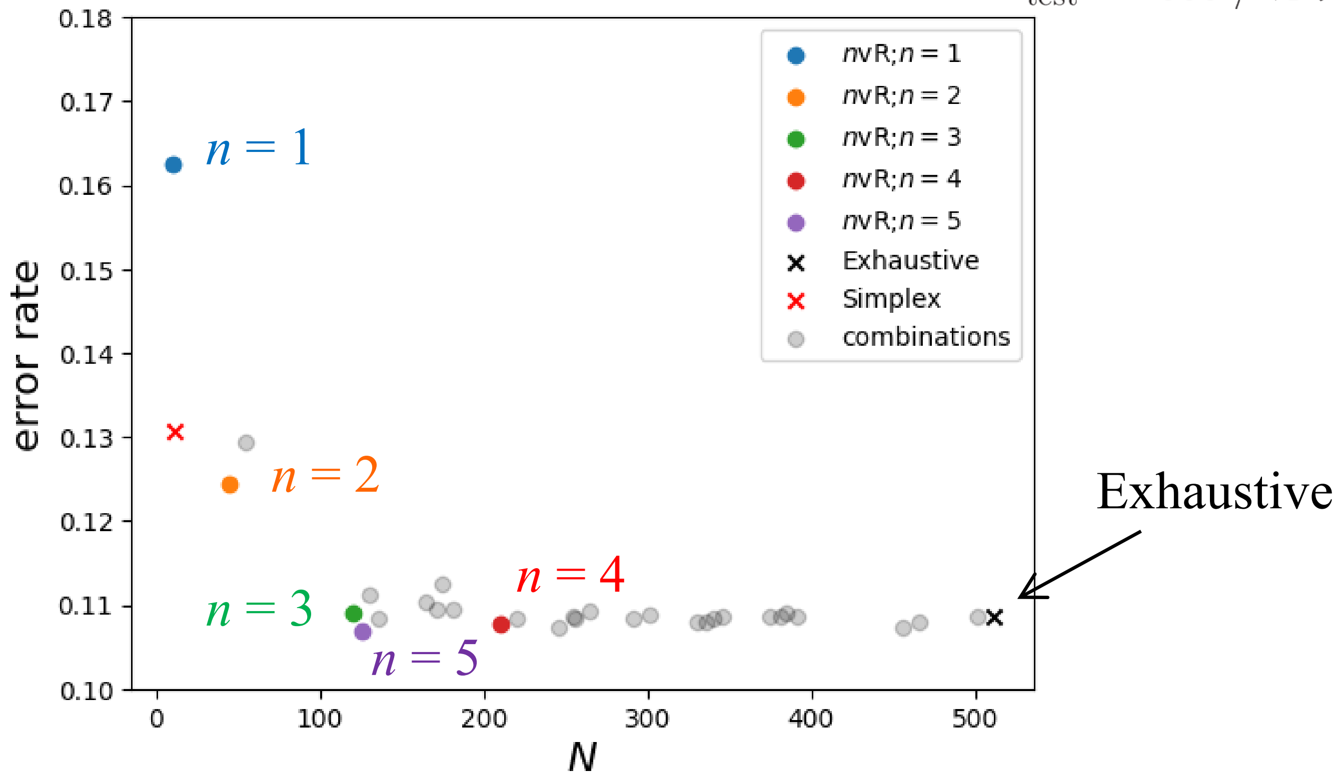
- 各カテゴリの平均ベクトルから正規乱数によりデータを生成
- 2値判別器はロジスティック回帰を使用

データセット：

$D_{\text{train}} = 10$ / カテゴリ

$D_{\text{test}} = 1000$ / カテゴリ

$M = 10$



n を大きくすると誤り率が下がる. $n = 3$ 以降はほぼ同じ性能

まとめと今後の課題

- nvR 符号の再帰的な構成を示し，行ベクトル（符号語）間のハミング距離が一定（等距離符号）になることを示した.
- nvR 符号を連接すると Exhaustive 符号が得られるため，Exhaustive 符号も等距離符号になる.
- 距離と符号長の比 D/N を比較すると，N（すなわち M）が大きいとき $n = M/2$ の nvR 符号が最も良い.
- 様々な符号との比較は今後の課題である.

参考文献

[1] T. G. Dietterich, and G. Bakiri, "Solving multiclass learning problems via error-correcting output codes," *Journal of artificial intelligence research*, vol. 2, pp. 263–286, 1994.

[2] G. Kumoi, H. Yagi, M. Kobayashi, M. Goto, and S. Hirasawa, "Performance evaluation of error-correcting output coding based on noisy and noiseless binary classifiers," *International Journal of Neural Systems*, vol. 33, no. 02, p. 2350004, 2023.

[3] 平澤茂一，雲居玄道，八木秀樹，小林学，後藤正幸，稲積宏誠，"構成的符号化を用いた ECOC の一構成法 (続)"，第 84 回全国大会講演論文集, vol. 2022, no. 1, pp. 161–162, 2022.

[4] H.-Y. Lin, S. M. Moser, and P.-N. Chen, "Weak flip codes and their optimality on the binary erasure channel," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 64, no. 7, pp. 5191–5218, 2018.

[5] G. James, and T. Hastie, "The error coding method and picts," *Journal of Computational and Graphical Statistics*, vol. 7, no. 3, pp. 377–387, 1998.

ご清聴ありがとうございました

目次

平澤茂一，雲居玄道，八木秀樹，小林学，“構成的符号化を用いたECOCの一構成法(続)，情報処理学会第84回全国大会，A4-03，愛媛，2022年3月2～5日から続く

[系 3] nvR 符号は等距離符号 (Equidistant codes) である．
また，そのハミング距離は最小距離 D に等しい．

(証明) 2 つの系列 a, b のハミング距離を $d_H(a, b)$ で示す．
以降では，帰納法により題意を示す．

符号語表の再帰的な構造を利用した,

数学的帰納法で証明できる

次に，式 (2) で $W_{n-1}^{(M-1)}$， $W_n^{(M-1)}$ が共に等距離符号であるとし，$W_n^{(M)}$ が等距離符号であることを導く．